专题五　四边形模型

模型 18　中点四边形

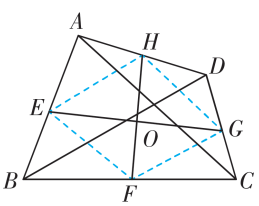
1. ①②④　【解析】易知顺次连接$\square ABCD$各边中点所得的新四边形是平行四边形. ①$\because AC \perp BD$,$\therefore$易得新四边形的相邻两边互相垂直,$\therefore$新的四边形是矩形,故①符合条件. ②$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore AO = OC$,$BO = DO$. $\because C_{\triangle ABO} = C_{\triangle CBO}$,$\therefore AB = BC$,$\therefore BO \perp AC$,$\therefore BD \perp AC$,$\therefore$新的四边形是矩形,故②符合条件. ③$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore \angle CBO = \angle ADO$. $\because \angle DAO = \angle CBO$,$\therefore \angle ADO = \angle DAO$,$\therefore AO = OD$,$\therefore AC = BD$,$\therefore$四边形$ABCD$是矩形,连接各边中点得到的新四边形是菱形,故③不符合条件. ④$\because \angle DAO = \angle BAO$,$BO = DO$,$\therefore AO \perp BD$,$\therefore AC \perp BD$,$\therefore$新的四边形是矩形,故④符合条件. 所以①②④符合条件. 故答案为①②④.

解题有法

顺次连接四边形各边的中点,得到的四边形形状和原四边形的对角线有关. 利用三角形中位线性质可得当对角线垂直时,所得新四边形是矩形.

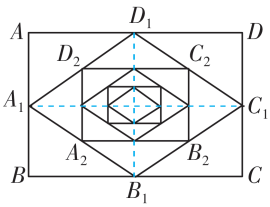
2. B　【解析】在Rt$\triangle ABC$中,$\angle CAB = 90°$,$AC = 2$,$\angle C = 60°$,$\therefore BC = 2AC = 4$,$AB = \sqrt{3}AC = 2\sqrt{3}$. $\because BD = CD$,$\therefore AD = DB = DC = 2$. 由作图可知,四边形$ADBE$是菱形,$\therefore AE // BD$,易得中点四边形$GHIJ$是矩形. $\because AD = AC = DC$,$\therefore \triangle ADC$为等边三角形,$\therefore \angle ADC = 60°$. $\because AE // DB$,$\therefore \angle EAD = \angle ADC = 60°$. $\because AE = AD$,$\therefore \triangle AED$是等边三角形,$\therefore AD = DE = 2$. $\because AJ = JE$,$AI = ID$,$\therefore IJ = \frac{1}{2}DE = 1$. $\because BH = DH$,$AI = ID$,$\therefore IH = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$,$\therefore$四边形$GHIJ$的周长为$2(1+\sqrt{3}) = 2+2\sqrt{3}$,故选B.

3. A　【解析】如图,连接EF,FG,GH,HE. $\because$点E,F,G,H分别为边AB,BC,CD,DA的中点,$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$,



$FG = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2}$,$GH = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$,$HE = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2}$,$\therefore EF = FG = GH = HE$,$\therefore$四边形$EFGH$为菱形,$\therefore EG \perp FH$,$OE = OG$,$OF = OH$,$\therefore OE^2 + OH^2 = EH^2 = \frac{25}{4}$,$\therefore EG^2 + FH^2 = 4OE^2 + 4OH^2 = 25$,故选A.

4. A　【解析】如图,连接A_1C_1,D_1B_1. 设四边形$A_1B_1C_1D_1$,四边形$A_2B_2C_2D_2$,…,四边形$A_nB_nC_nD_n$的面积分别为S_1,S_2,…,S_n.



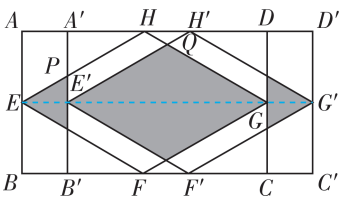
$\because$顺次连接矩形$ABCD$各边的中点,得到四边形$A_1B_1C_1D_1$,$\therefore$四边形A_1BCC_1是矩形,$\therefore A_1C_1 = BC$,$A_1C_1 // BC$. 同理,$B_1D_1 = AB$,$B_1D_1 // AB$,$\therefore A_1C_1 \perp B_1D_1$,$\therefore S_1 = \frac{1}{2}ab$. $\because$顺次连接四边形$A_1B_1C_1D_1$各边的中点,得到四边形$A_2B_2C_2D_2$,$\therefore C_2D_2 = \frac{1}{2}A_1C_1$,$A_2D_2 = \frac{1}{2}B_1D_1$,$\therefore S_2 = \frac{1}{2}A_1C_1 \times \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{1}{4}ab$,…,$\therefore S_n = \frac{ab}{2^n}$,故选A.

5. B　【解析】①连接A_1C_1,B_1D_1. $\because$在四边形$ABCD$中,顺次连接四边形$ABCD$各边中点,得到四边形$A_1B_1C_1D_1$,$\therefore A_1D_1 // BD$,$B_1C_1 // BD$,$C_1D_1 // AC$,$A_1B_1 // AC$,$\therefore A_1D_1 // B_1C_1$,$A_1B_1 // C_1D_1$,$\therefore$四边形$A_1B_1C_1D_1$是平行四边形. $\because AC \perp BD$,$\therefore$易得四边形$A_1B_1C_1D_1$是矩形,$\therefore B_1D_1 = A_1C_1$,$\therefore$易得$A_2D_2 = C_2D_2 = C_2B_2 = B_2A_2$,$\therefore$四边形$A_2B_2C_2D_2$是菱形,故①错误. ②由①知,四边形$A_2B_2C_2D_2$是菱形,$\therefore$同理可知四边形$A_4B_4C_4D_4$是菱形,故②正确. ③根据三角形的中位线定理易知,$A_5B_5 = \frac{1}{2}A_3B_3 = \frac{1}{4}A_1B_1 = \frac{1}{8}AC$,$B_5C_5 = \frac{1}{2}B_3C_3 = \frac{1}{4}B_1C_1 = \frac{1}{8}BD$,$\therefore$四边形$A_5B_5C_5D_5$的周长是$2 \times \frac{1}{8}(a+b) = \frac{a+b}{4}$,故③正

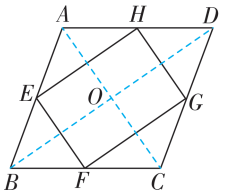
确. ④∵ 四边形 $ABCD$ 中，$AC=a$，$BD=b$，且 $AC\perp BD$，∴ $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}ab$. 由三角形的中位线定理可以推知，四边形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积是 $\frac{ab}{2^{n+1}}$，故④正确. 综上所述，②③④正确. 故选 B.

6. 2 【解析】连接 FH,EG. ∵ 点 E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点，∴ EF,GH,EH 分别为 $\triangle ABC,\triangle ADC,\triangle ABD$ 的中位线，∴ $EF=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$EF\parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，$GH\parallel AC$，$EH\parallel BD$，∴ $EF=GH$，$EF\parallel GH$，∴ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. ∵ $GH\parallel AC$，$EH\parallel BD$，$AC\perp BD$，∴ $EF\perp EH$，∴ 平行四边形 $EFGH$ 为矩形. ∵ 四边形 $EFGH$ 是“对垂四边形”，∴ $EG\perp FH$，∴ 矩形 $EFGH$ 为正方形，∴ 四边形 $EFGH$ 的面积为 $(\sqrt{2})^2=2$，故答案为 2.

7. 29 【解析】如图，连接 EG'，设 EH 与 $A'B'$ 相交于点 P，$E'H'$ 与 HG 相交于点 Q. 由平移的性质可知 $AA'=HH'=DD'$，$AD'\parallel EG'$. ∵ $AD'=7HH'$，∴ $AD=6HH'$，$A'D=5HH'$. ∵ H 是 AD 的中点，∴ $AH=\frac{1}{2}AD=3HH'$，∴ $A'H=2HH'$. ∵ $A'H\parallel EE'$，∴ $\triangle A'HP\backsim\triangle E'EP$，∴ $\frac{E'P}{A'P}=\frac{EE'}{A'H}=\frac{1}{2}$，∴ $PE'=\frac{1}{2}A'P=\frac{1}{3}A'E'$，∴ $S_{\triangle EE'P}=\frac{1}{6}S_{矩形AEE'A'}$. 同理可证 $\triangle HH'Q\backsim\triangle GE'Q$. 设 $\triangle E'GQ$ 中边 $E'G$ 上的高为 h，$\triangle HH'Q$ 中边 HH' 上的高为 h_1，∴ $\frac{h}{h_1}=\frac{E'G}{H'H}=5$，∴ $h=\frac{5}{6}DG$，∴ $S_{\triangle E'QG}=\frac{5}{12}S_{矩形A'E'GD}$. ∵ 矩形 $ABC'D'$ 的面积为 84，∴ 矩形 $AA'B'B$ 的面积为 12，矩形 $A'DCB'$ 的面积为 60. ∵ E,E',G 分别为 $AB,A'B',CD$ 的中点，∴ 由对称性及平移的性质易得 $S_{阴影部分}=4S_{\triangle PEE'}+2S_{\triangle E'QG}=4\times\frac{1}{2}\times12\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}\times60\times\frac{5}{12}=29$. 故答案为 29.



8. （1）【证明】如图，连接 AC,BD 交于点 O.



∵ $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∵ 四边形 $EFGH$ 是矩形，∴ $HG\perp FG$.

∵ H,G 分别是 AD,DC 的中点，∴ $HG\parallel AC$.

∵ G,F 分别是 DC,BC 的中点，∴ $GF\parallel BD$，∴ $BD\perp AC$，∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

（2）【解】∵ H,G 分别是 AD,DC 的中点，G,F 分别是 DC,BC 的中点，∴ $HG=\frac{1}{2}AC$，$FG=\frac{1}{2}BD$.

∵ 矩形 $EFGH$ 的周长为 22，∴ $HG+FG=11$，∴ $AC+BD=22$. ∵ $\frac{1}{2}\times AC\times BD=10$，∴ $AC\times BD=20$. ∵ $(AC+BD)^2=AC^2+2\times AC\times BD+BD^2$，∴ $AC^2+BD^2=444$，∴ $\frac{1}{4}AC^2+\frac{1}{4}BD^2=111$，即 $\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2=111$，∴ $AO^2+BO^2=111$，∴ $AB^2=AO^2+BO^2=111$，∴ $AB=\sqrt{111}$.

知识归纳

一般中点四边形是平行四边形，对角线相等的四边形的中点四边形是菱形，对角线垂直的四边形的中点四边形是矩形，对角线相等且垂直的四边形的中点四边形是正方形.

9. 【解】【发现与证明】答案不唯一.

证明结论 1：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

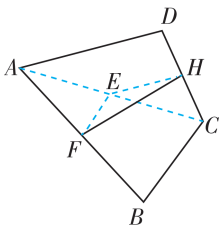
证明如下：在四边形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 是各边中点，∴ EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线，∴ $EF\parallel BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$. 同理，$GH\parallel BD$，$GH=\frac{1}{2}BD$，∴ $GH\parallel EF$，$GH=EF$，∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

【探究与应用】

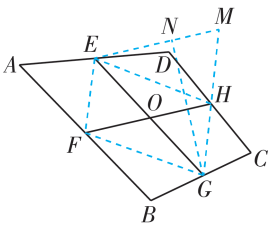
（1）如图（1），连接 AC，取 AC 的中点 E，连接 FE,HE.

∵ 点 E,F 分别为 AC,AB 的中点，∴ $EF=\frac{1}{2}BC=2$，同理 $EH=\frac{1}{2}AD=3$. ∵ $EH-EF<FH<EF+$

EH，∴ $1<FH<5$. 故答案为 $1<FH<5$.



图（1）



图（2）

（2）如图（2），连接 EF，FG，GH，HE，由结论 1 可得四边形 $EFGH$ 为平行四边形，∴ $EF//HG$. 过点 E 作 $EM//FH$，交 GH 的延长线于点 M，过点 G 作 $GN\perp EM$ 于点 N.

∵ $EF//GM$，$EM//FH$，

∴ 四边形 $FHME$ 为平行四边形，$\angle EOF=\angle GEM=60°$，

∴ $FH=EM=6$，$FE=HM$，$\angle EGN=30°$，

∴ $EN=\frac{1}{2}EG=4$，

∴ $GN=\sqrt{EG^2-EN^2}=4\sqrt{3}$，

∴ $S_{\triangle EGM}=\frac{1}{2}EM\times GN=12\sqrt{3}$.

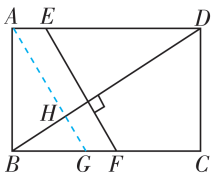
易得 $S_{四边形EFGH}=S_{\triangle EGM}=12\sqrt{3}$，

由结论 3 可得 $S_{四边形ABCD}=2S_{四边形EFGH}=24\sqrt{3}\,cm^2$.

模型 19　“十字架”模型

1. $\frac{60}{13}$　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle ABE=\angle C=90°$，$AB=BC$. ∵ $BE=CF$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle BCF$（SAS），∴ $\angle BAE=\angle CBF$. ∵ $\angle CBF+\angle ABG=90°$，∴ $\angle BAE+\angle ABG=90°$，∴ $\angle BGE=90°$，∴ $\angle BGE=\angle C$. 又∵ $\angle EBG=\angle FBC$，∴ $\triangle EBG\backsim\triangle FBC$，∴ $\frac{BG}{BC}=\frac{BE}{BF}$. ∵ $BC=AB=12$，$CF=BE=5$，∴ $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，∴ $\frac{BG}{12}=\frac{5}{13}$，∴ $BG=\frac{60}{13}$. 故答案为 $\frac{60}{13}$.

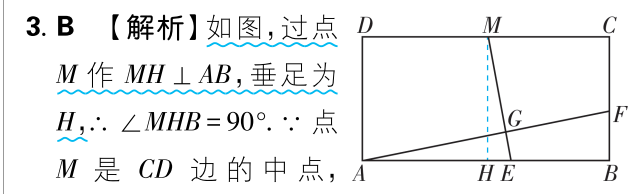
2. C　【解析】如图，过点 A 作 $AG//EF$，交 BC 于点 G，交 BD 于点 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD//BC$，$AB=CD=3$，$\angle ABC=\angle C=90°$，∴ 四边形 $AGFE$ 是平行四边形，∴ $AG=EF$. ∵ $EF\perp BD$，∴ $AG\perp BD$，∴ $\angle AHB=90°$，∴ $\angle HAB+\angle ABH=90°$. ∵ $\angle ABH+\angle DBC=90°$，∴ $\angle HAB=\angle DBC$，∴ $\triangle ABG\backsim\triangle BCD$，∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{BD}$. ∵ $BC=4$，$CD=3$，$\angle C=90°$，∴ $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，∴ $\frac{3}{4}=\frac{AG}{5}$，∴ $AG=\frac{15}{4}$，∴ $EF=AG=\frac{15}{4}$，故选 C.



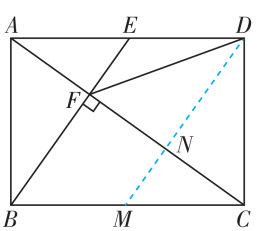
关键点拨

矩形内一条线段不过顶点的“十字架”模型，作平行线段证 $\triangle ABG\backsim\triangle BCD$.

3. B　【解析】如图，过点 M 作 $MH\perp AB$，垂足为 H，∴ $\angle MHB=90°$. ∵ 点 M 是 CD 边的中点，∴ $DC=2MC$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle B=\angle C=90°$，$AB=DC=2MC$，∴ 四边形 $MHBC$ 是矩形，∴ $MH=BC$，$MC=BH$. ∵ $AB=2BC$，∴ $AB=2MH$. ∵ $AF\perp ME$，∴ $\angle AGE=90°$，∴ $\angle GAE+\angle AEG=90°$. ∵ $\angle AEG+\angle HME=90°$，∴ $\angle GAE=\angle HME$. ∵ $\angle MHE=\angle B=90°$，∴ $\triangle ABF\backsim\triangle MHE$，∴ $\frac{AB}{MH}=\frac{BF}{HE}$，∴ $\frac{2MH}{MH}=\frac{1}{HE}$，∴ $HE=\frac{1}{2}$. ∵ $BE=2$，∴ $MC=BH=HE+BE=2.5$，∴ $AB=2BH=5=2BC$，∴ $BC=2.5=MH$，∴ $ME=\sqrt{MH^2+HE^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$，$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{26}$. ∵ $AE=AB-BE=5-2=3$，∴ $\sin\angle BAF=\frac{BF}{AF}=\frac{GE}{AE}$，∴ $\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{GE}{3}$，∴ $GE=\frac{3\sqrt{26}}{26}$，∴ $MG=ME-GE=\frac{\sqrt{26}}{2}-\frac{3\sqrt{26}}{26}=\frac{5\sqrt{26}}{13}$，∴ $\frac{GE}{MG}=\frac{3}{10}$，故选 B.



4. A　【解析】如图，过 D 作 $DM//BE$ 交 AC 于 N，交 BC 于 M. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD//BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=BC$，∴ $\angle EAC=\angle ACB$. ∵ $BE\perp AC$ 于点 F，∴ $\angle AFE=90°=$



$\angle ABC$，∴ $\triangle AEF \backsim \triangle CAB$，故①正确. ∵ $AD // BC$，∴ $\triangle AEF \backsim \triangle CBF$，∴ $\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{FC}$. ∵ $AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，∴ $\frac{AF}{CF}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$，∴ $CF=2AF$，故②正确. ∵ $DE // BM$，$BE // DM$，∴ 四边形 $BMDE$ 是平行四边形，∴ $BM=DE=\frac{1}{2}BC$，∴ $BM=CM$. ∵ $MN // BF$，∴ $CN=NF$. ∵ $BE \perp AC$ 于点 F，$DM // BE$，∴ $DN \perp CF$，∴ DN 垂直平分线段 CF，∴ $DF=DC$，故③正确. ∵ $\triangle AEF \backsim \triangle CBF$，∴ $\frac{EF}{BF}=\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{CF}=\frac{1}{2}$，∴ $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABF}$，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}S_{矩形ABCD}$，∴ $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{12}S_{矩形ABCD}$. 又 ∵ $S_{四边形CDEF}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}-\frac{1}{12}S_{矩形ABCD}=\frac{5}{12}S_{矩形ABCD}$，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{6}S_{矩形ABCD}$，∴ $S_{四边形CDEF}=\frac{5}{2}S_{\triangle ABF}$，故④正确. 故选 A.

关键点拨

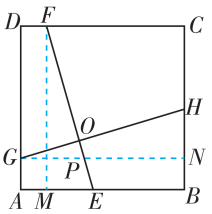
矩形内“十字架”模型，由 $AD // BC$ 可证 $\triangle AEF \backsim \triangle CBF$.

5. $2\sqrt{13}$　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $\angle BAE=\angle D=90°$，$AB=AD$. ∵ $AE=DF$，∴ $\triangle ABE \cong \triangle DAF$（SAS），∴ $\angle ABE=\angle DAF$. ∵ $\angle ABE+\angle BEA=90°$，∴ $\angle DAF+\angle BEA=90°$，∴ $\angle AGE=\angle BGF=90°$. ∵ 点 H 为 BF 的中点，∴ $GH=\frac{1}{2}BF$. ∵ $BC=12$，$CF=CD-DF=12-4=8$，∴ $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$，∴ $GH=2\sqrt{13}$. 故答案为 $2\sqrt{13}$.

关键点拨

正方形内两条线段都过顶点的“十字架”模型，先证 $\triangle ABE \cong \triangle DAF$（SAS），再利用直角三角形斜边中线的性质和勾股定理计算.

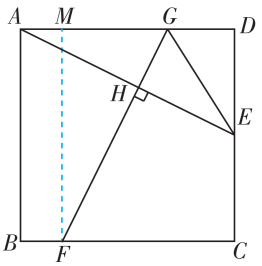
6. 4　【解析】如图，过点 F 作 $FM \perp AB$ 于 M，过点 G 作 $GN \perp BC$ 于 N，设 GN 与 EF 交于点 P. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $GN=FM$，且 $GN \perp FM$，∴ $\angle EFM+\angle GPF=90°$. ∵ $\angle FOH=90°$，∴ $\angle HGN+\angle GPF=90°$，∴ $\angle EFM=\angle HGN$. 在 $\triangle EFM$ 和 $\triangle HGN$ 中，$\begin{cases}\angle EFM=\angle HGN,\\ FM=GN,\\ \angle EMF=\angle HNG=90°,\end{cases}$ ∴ $\triangle EFM \cong \triangle HGN$（ASA），∴ $GH=EF$. ∵ $EF=4$，∴ $GH=4$. 故答案为 4.



关键点拨

正方形内两条线段都不过顶点的“十字架”模型，作垂线段证 $\triangle EFM \cong \triangle HGN$（ASA）.

7. 5　【解析】如图，过 F 作 $FM \perp AD$ 于 M，则 $\angle FMG=90°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $\angle D=\angle DAB=\angle B=90°$，$AD=AB$. ∵ $\angle B=\angle BAD=\angle AMF=90°$，∴ 四边形 $ABFM$ 为矩形，∴ $MF=AB=AD$. ∵ $GF \perp AE$ 交 BC 于点 F，∴ $\angle MFG+\angle AGF=\angle DAE+\angle AGF=90°$，∴ $\angle MFG=\angle DAE$，∴ $\triangle ADE \cong \triangle FMG$（ASA），∴ $GF=AE=4\sqrt{5}$. ∵ $\tan\angle DAE=\frac{1}{2}=\frac{DE}{AD}$，∴ $AD=2DE$. 在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AE^2=AD^2+DE^2$，∴ $(4\sqrt{5})^2=(2DE)^2+DE^2$，∴ $DE=4$，$AD=8$. ∵ H 为 AE 的中点，$GH \perp AE$，∴ $AG=GE$. ∴ 设 $GE=AG=x$，则 $GD=8-x$. 在 Rt$\triangle GED$ 中，$GE^2=GD^2+DE^2$，∴ $x^2=(8-x)^2+4^2$，∴ $x=5$，∴ $GE=5$. 故答案为 5.



关键点拨

正方形内一条线段不过顶点的“十字架”模型，作垂线段，证 $\triangle ADE \cong \triangle FMG$（ASA），借助三角函数值和勾股定理计算.

8.（1）【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle C=\angle ADE=90°,\therefore \angle CDF+\angle DFC=90°.$

$\because AE\perp DF,\therefore \angle DGE=90°,$

$\therefore \angle CDF+\angle AED=90°,\therefore \angle AED=\angle DFC,$

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle DCF.$

(2)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD=DC,AD/\!/BC,\angle ADE=\angle DCF=90°.$

$\because AE=DF,\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle DCF(\mathrm{HL}),$

$\therefore DE=CF.\because CH=DE,\therefore CF=CH.$

$\because$ 点 H 在 BC 的延长线上,

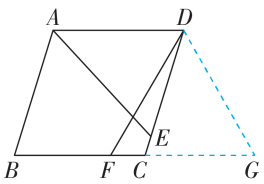
$\therefore \angle DCH=\angle DCF=90°.$

又$\because DC=DC,\therefore \triangle DCF\cong\triangle DCH(\mathrm{SAS}),$

$\therefore \angle DFC=\angle H.$

$\because AD/\!/BC,\therefore \angle ADF=\angle DFC,\therefore \angle ADF=\angle H.$

(3)【解】如图,延长 BC 至点 G,使 $CG=DE=8$,连接 DG.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AD=DC,AD/\!/BC,$

$\therefore \angle ADE=\angle DCG,$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle DCG(\mathrm{SAS}),$

$\therefore \angle DGC=\angle AED=60°,AE=DG.$

$\because AE=DF,\therefore DG=DF,$

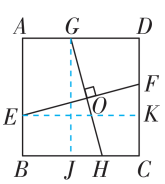
$\therefore \triangle DFG$ 是等边三角形,

$\therefore FG=DF=11.$

$\because CF+CG=FG,\therefore CF=FG-CG=11-8=3,$

即 CF 的长为 3.

9. (1)【解】如图(1),设 EF 交 GH 于点 O,过点 G 作 $GJ\perp BC$ 于点 J,过点 E 作 $EK\perp CD$ 于点 K.



图(1)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°,$

$\therefore$ 四边形 $AGJB$、四边形 $BCKE$ 是矩形,

$\therefore GJ=AB=BC=EK,\angle GJB=\angle EKC=90°,$

$\therefore \angle GJH=\angle EKF=90°.$

$\because EF\perp GH,\therefore \angle FOH=90°,$

$\therefore \angle C+\angle FOH=90°+90°=180°,$

$\therefore \angle OHC+\angle OFC=180°.$

$\because \angle OHJ+\angle OHC=180°,$

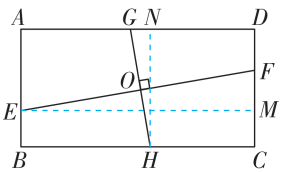
$\therefore \angle OFC=\angle OHJ.$

又$\because \angle GJH=\angle EKF=90°,GJ=EK,$

$\therefore \triangle GJH\cong\triangle EKF(\mathrm{AAS}),$

$\therefore GH=EF=5.$

如图(2),设 EF 交 GH 于点 O,过点 E 作 $EM\perp CD$ 于 M,过点 H 作 $HN\perp AD$ 于点 N,



图(2)

$\therefore \angle GNH=\angle FME=90°.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°,AD=BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABHN$、四边形 $ADME$ 都是矩形,

$\therefore AB=NH,EM=AD=BC.$

$\because EF\perp GH,\angle D=90°,$

$\therefore \angle GOF+\angle D=180°,$

$\therefore \angle NGH+\angle DFO=180°.$

又$\because \angle DFO+\angle MFE=180°,$

$\therefore \angle MFE=\angle NGH.$

$\because \angle GNH=\angle FME,$

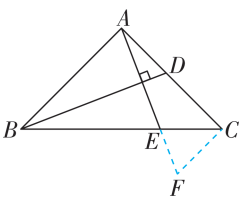
$\therefore \triangle GNH\backsim\triangle FME,$

$\therefore \dfrac{EF}{GH}=\dfrac{EM}{NH}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2AB}{AB}=2,$

$\therefore GH=\dfrac{1}{2}EF=\dfrac{1}{2}\times 8=4.$

故答案为 5,4.

(2)【证明】如图(3),过点 C 作 $CF\perp AC$ 交 AE 的延长线于点 F,



图(3)

则 $\angle ACF=90°,$

$\therefore \angle F+\angle FAC=90°.$

$\because AE\perp BD,$

$\therefore \angle ADB+\angle FAC=90°,$

$\therefore \angle F=\angle ADB.$

又$\because AB=CA,\angle BAD=\angle ACF=90°,$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CAF(\mathrm{AAS}),$

$\therefore AD=CF.$

$\because \angle BAC+\angle ACF=90°+90°=180°,$

$\therefore AB/\!/CF,$

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle FCE,$

$\therefore \dfrac{AB}{CF}=\dfrac{BE}{EC},$

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BE}{EC}$.

(3)【解】GH 的长为$\dfrac{11\sqrt{10}}{6}$或$\dfrac{9\sqrt{13}}{5}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BAD=\angle ABC=\angle D=90°, AD/\!/BC$，

$\therefore \angle AEB=\angle CBE$.

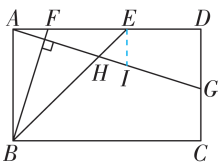
$\because BE$ 平分$\angle ABC$，$\therefore \angle ABE=\angle CBE$，

$\therefore \angle ABE=\angle AEB$，

$\therefore AE=AB=6$.

分两种情况：

①如图(4)，当 $AF=\dfrac{1}{3}AE=2$ 时，点 G 在 CD 上，



图(4)

$\therefore BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

$\because AG\perp BF$，

$\therefore \angle ABF+\angle BAG=90°$.

$\because \angle DAG+\angle BAG=\angle BAD=90°$，

$\therefore \angle ABF=\angle DAG$.

又$\because \angle BAF=\angle D=90°$，$\therefore \triangle BAF\backsim\triangle ADG$，

$\therefore \dfrac{BF}{AG}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore AG=\dfrac{5}{3}BF=\dfrac{5}{3}\times 2\sqrt{10}=\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$.

过点 E 作 $EI\perp AD$ 交 AG 于点 I，

则 $EI/\!/AB$，$\angle AEI=90°=\angle BAF$.

$\because AB=EA$，$\angle ABF=\angle EAI$，

$\therefore \triangle BAF\cong\triangle AEI$(ASA)，

$\therefore EI=AF=2, AI=BF=2\sqrt{10}$.

$\because EI/\!/AB$，

$\therefore \triangle ABH\backsim\triangle IEH$，

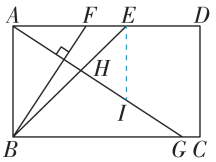
$\therefore \dfrac{AH}{IH}=\dfrac{AB}{IE}=\dfrac{6}{2}=3$，

$\therefore AH=3IH$，

$\therefore AH=\dfrac{3}{4}AI=\dfrac{3}{4}\times 2\sqrt{10}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore GH=AG-AH=\dfrac{10\sqrt{10}}{3}-\dfrac{3\sqrt{10}}{2}=\dfrac{11\sqrt{10}}{6}$.

②如图(5)，当 $AF=\dfrac{2}{3}AE=4$ 时，$\dfrac{5}{3}AF=\dfrac{20}{3}>6$，点 G 在 BC 上，



图(5)

$\therefore BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

同①得$\triangle BAF\backsim\triangle GBA$，

$\therefore \dfrac{BF}{AG}=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore AG=\dfrac{3}{2}BF=\dfrac{3}{2}\times 2\sqrt{13}=3\sqrt{13}$.

过点 E 作 $EI\perp AD$ 交 AG 于点 I，

同①得$\triangle BAF\cong\triangle AEI, EI/\!/AB$，

$\therefore EI=AF=4, AI=BF=2\sqrt{13}$，$\triangle ABH\backsim\triangle IEH$，

$\therefore \dfrac{AH}{IH}=\dfrac{AB}{IE}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$，

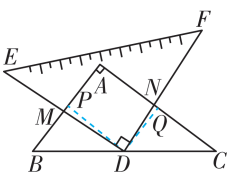
$\therefore AH=\dfrac{3}{5}AI=\dfrac{3}{5}\times 2\sqrt{13}=\dfrac{6\sqrt{13}}{5}$，

$\therefore GH=AG-AH=3\sqrt{13}-\dfrac{6\sqrt{13}}{5}=\dfrac{9\sqrt{13}}{5}$.

综上所述，GH 的长为$\dfrac{11\sqrt{10}}{6}$或$\dfrac{9\sqrt{13}}{5}$.

模型 20　对角互补模型

1.【解】如图，过点 D 向 AC 和 AB 分别作垂线段 DQ 和 DP，垂足分别为 Q, P，易知四边形 $APDQ$ 为矩形，



$\therefore \angle PDQ=90°, DQ/\!/AB, DP/\!/AC$.

$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore AP=DQ=\dfrac{1}{2}AB=3, AQ=DP=\dfrac{1}{2}AC=4$.

$\because \angle MDN=90°$，$\therefore \angle MDP+\angle PDN=90°$.

$\because \angle PDQ=90°$，$\therefore \angle NDQ+\angle PDN=90°$，

$\therefore \angle MDP=\angle NDQ$.

$\because \angle DPM=\angle DQN=90°$，$\therefore \triangle DPM\backsim\triangle DQN$，

$\therefore \dfrac{DP}{DQ}=\dfrac{PM}{QN}=\dfrac{AM-AP}{AQ-AN}=\dfrac{AN-AP}{AQ-AN}$.

设 $AM=AN=x$，则$\dfrac{4}{3}=\dfrac{x-3}{4-x}$，解得 $x=\dfrac{25}{7}$.

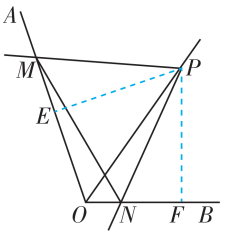
经检验，$x=\dfrac{25}{7}$是原方程的根，

$\therefore AN=\frac{25}{7}$.

关键点拨

四边形对角互补、无角平分线，作垂线段，证$\triangle DPM\backsim\triangle DQN$，利用相似性质计算.

2. ①③④ 【解析】如图，作$PE\perp OA$于E，$PF\perp OB$于F，



$\therefore\angle PEO=\angle PFO=90°$，

$\therefore\angle EPF+\angle AOB=180°$.

$\because\angle MPN+\angle AOB=180°$，

$\therefore\angle EPF=\angle MPN$，

$\therefore\angle EPM=\angle FPN$.

$\because OP$平分$\angle AOB$，$PE\perp OA$于E，$PF\perp OB$于F，

$\therefore PE=PF$.

在$\mathrm{Rt}\triangle POE$和$\mathrm{Rt}\triangle POF$中，$\begin{cases}OP=OP,\\PE=PF,\end{cases}$

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle POE\cong\mathrm{Rt}\triangle POF(\mathrm{HL})$，$\therefore OE=OF$.

在$\triangle PEM$和$\triangle PFN$中，$\begin{cases}\angle EPM=\angle FPN,\\PE=PF,\\\angle PEM=\angle PFN,\end{cases}$

$\therefore\triangle PEM\cong\triangle PFN(\mathrm{ASA})$，$\therefore EM=NF$，$PM=PN$，故①正确. $\because S_{\triangle PEM}=S_{\triangle PNF}$，$\therefore S_{四边形PMON}=S_{四边形PEOF}$，为定值，故④正确. $OM+ON=OE+ME+OF-NF=2OE$，为定值，故③正确. $\because M$，N的位置变化，$\therefore MN$的长度是变化的，故②错误. 故答案为①③④.

关键点拨

$\angle MPN$与$\angle AOB$互补，符合对角互补模型，作垂线段，证$\mathrm{Rt}\triangle POE\cong\mathrm{Rt}\triangle POF$，$\triangle PEM\cong\triangle PFN$.

3. (1)1 (2)$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 【解析】(1)作$DG/\!/BC$交AC于G. $\because\triangle ABC$是等边三角形，$\therefore\angle A=\angle B=\angle C=60°$. $\because DG/\!/BC$，$\therefore\angle B=\angle ADG=\angle C=\angle AGD=60°$，$\angle BDG=120°$，$\therefore\triangle ADG$是等边三角形，$\therefore AD=DG$. $\because\frac{AD}{DB}=n$，$n=1$，$\therefore DB=AD$，$\therefore DB=DG$. $\because\angle BDG=120°$，$\angle EDF=120°$，$\therefore\angle BDF+\angle GDF=\angle EDG+\angle GDF=120°$，$\therefore\angle BDF=\angle EDG$. $\because\angle B=\angle AGD=60°$，$\therefore\triangle DBF\cong\triangle DGE$(ASA)，$\therefore DE=DF$，$\therefore\frac{DE}{DF}=1$. 故答案为1.

(2)由(1)知，$AD=DG$，$\angle BDF=\angle EDG$，$\angle B=\angle AGD=60°$，$\therefore\triangle DBF\backsim\triangle DGE$，$\therefore\frac{DG}{BD}=\frac{DE}{DF}$，$\therefore\frac{AD}{BD}=\frac{DE}{DF}=n$. $\because\frac{DF}{DE}+\frac{AD}{DB}=3$，$\therefore n+\frac{1}{n}=3$，$\therefore n^2-3n+1=0$，$\therefore n_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$n_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 经检验，$n_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$n_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$是原方程的解，$\therefore n=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 故答案为$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

关键点拨

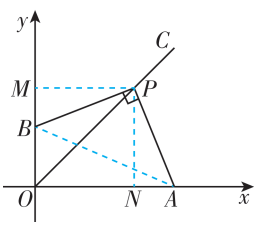
$\angle EDF+\angle C=180°$，符合对角互补模型，作$DG/\!/BC$交AC于G，分别证$\triangle DBF\cong\triangle DGE$和$\triangle DBF\backsim\triangle DGE$，利用全等和相似的性质计算.

4. 【解】(1)$\because$点$P(3m-1,-2m+4)$在第一象限的角平分线OC上，

$\therefore 3m-1=-2m+4$，$\therefore m=1$，$\therefore P(2,2)$.

(2)①不变.

如图，过点P作$PM\perp y$轴于M，$PN\perp OA$于N，则$\angle PMO=\angle PNO=\angle MON=90°$，$PM=PN=2$，$\therefore$四边形$OMPN$是正方形，



$\therefore\angle MPN=90°=\angle APB$，$\therefore\angle MPB=\angle NPA$.

在$\triangle PMB$和$\triangle PNA$中，$\begin{cases}\angle MPB=\angle NPA,\\PM=PN,\\\angle PMB=\angle PNA,\end{cases}$

$\therefore\triangle PMB\cong\triangle PNA(\mathrm{ASA})$，

$\therefore BM=AN$，$\therefore OB+OA=OM-BM+ON+AN=2OM=4$. 故$OA+OB$的值不发生变化，此定值为4.

②如图，连接AB.

$\because\angle AOB=90°$，$\therefore OA^2+OB^2=AB^2$.

∵ $\angle BPA=90°$，∴ $AB^2=PA^2+PB^2$.

∵ $\triangle PMB\cong\triangle PNA$，∴ $PB=PA$，∴ $AB^2=2PA^2$，

∴ $OA^2+OB^2=2PA^2$，

∴ 当 PA 的值最小时，OA^2+OB^2 的值也最小.

根据垂线段最短得 PA 的最小值为 2，

∴ OA^2+OB^2 的最小值为 8.

关键点拨

四边形对角互补、有角平分线，作垂线段，证 $\triangle PMB\cong\triangle PNA$(ASA)，利用全等三角形的性质将线段等量代换进行计算.

5.【解】(1)∵ AC，BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线，

∴ $OA=OB=OC$，$\angle OAM=\angle OBN=\angle OCB=45°$，$\angle AOB=90°$，

∴ $\angle BOM+\angle AOM=90°$.

∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形，点 H 与点 O 重合，

∴ $\angle EOG=90°$，∴ $\angle BOM+\angle BON=90°$，

∴ $\angle AOM=\angle BON$.

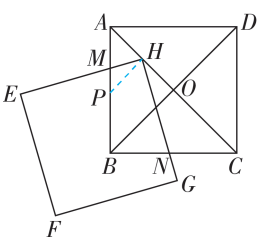
在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle BON$ 中，$\begin{cases}\angle OAM=\angle OBN,\\ OA=OB,\\ \angle AOM=\angle BON,\end{cases}$

∴ $\triangle AOM\cong\triangle BON$(ASA)，∴ $OM=ON$，

即 $HM=HN$，故答案为 $HM=HN$.

(2)① $HN=3HM$，证明如下：

如图，过点 H 作 $HP\perp AC$ 交 AB 于点 P，



则 $\angle CHP=\angle AHP=90°$.

∵ $\angle OAM=45°$，

∴ $\triangle AHP$ 是等腰直角三角形，

∴ $PH=AH$，$\angle MPH=45°$.

∵ 点 H 为 OA 的中点，$OA=OC$，

∴ $AH=\frac{1}{3}CH$，∴ $PH=\frac{1}{3}CH$.

∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

∴ $\angle EHG=90°$，∴ $\angle MHP+\angle PHN=90°$.

∵ $\angle NHC+\angle PHN=90°$，∴ $\angle MHP=\angle NHC$.

∵ $\angle MPH=\angle NCH=45°$，∴ $\triangle MPH\backsim\triangle NCH$，

∴ $\frac{HM}{HN}=\frac{PH}{CH}=\frac{1}{3}$，即 $HN=3HM$.

②由①得 $\triangle MPH\backsim\triangle NCH$，

∴ $\frac{PM}{CN}=\frac{PH}{CH}=\frac{1}{3}$，∴ $PM=\frac{1}{3}CN=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle ABC=90°$，$AB=BC=2$，

∴ $AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$.

∵ $AH=\frac{1}{3}CH$，∴ $AH=\frac{1}{4}AC=\frac{1}{4}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵ $\triangle AHP$ 是等腰直角三角形，

∴ $AP=\sqrt{2}AH=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，

∴ $AM=AP-PM=1-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

6.【解】(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，且 AC 与 BD 交于点 P，

∴ $PA=PC$，$PB=PD$，$AC=BD$，

∴ $PA=PB=PC$.

∵ $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，

∴ $PE/\!/BC$，$PF/\!/AB$，$AE=BE$，$CF=BF$，

∴ $PE=\frac{1}{2}BC$，$PF=\frac{1}{2}AB$.

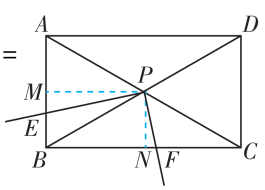
∵ $\angle ABC=90°$，$\angle ACB=30°$，

∴ $AC=2AB$，$BC=\sqrt{3}AB$，

∴ $\frac{PE}{PF}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AB}=\frac{\sqrt{3}AB}{AB}=\sqrt{3}$，∴ $\frac{PE}{PF}$的值为$\sqrt{3}$，

故答案为$\sqrt{3}$.

(2) 如图(1)，过点 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M，$PN\perp BC$ 于点 N.



图(1)

∵ $\angle PMB=\angle MBN=\angle PNB=90°$，

∴ 四边形 $PMBN$ 是矩形，∴ $\angle MPN=90°$.

∵ $\angle EPF=90°$，∴ $\angle EPM=\angle FPN=90°-\angle EPN$.

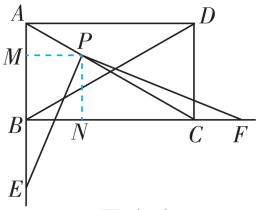
∵ $\angle PME=\angle PNF=90°$，∴ $\triangle PME\backsim\triangle PNF$，

∴ $\frac{PE}{PF}=\frac{PM}{PN}$.

由(1)得$\frac{PM}{PN}=\sqrt{3}$，∴ $\frac{PE}{PF}=\sqrt{3}$，∴ $\frac{PE}{PF}$的值为$\sqrt{3}$.

(3)$\frac{PE}{PF}$的值会变化.

证明如下:如图(2),过点 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M,$PN\perp BC$ 于点 N.



图(2)

$\because\angle PMB=\angle MBN=\angle PNB=90°$,

$\therefore$ 四边形 $PMBN$ 是矩形,

$\therefore\angle MPN=90°$,$PM//BC$,$PN//AB$,

$\therefore\angle APM=\angle PCN$,$\angle PAM=\angle CPN$,

$\therefore\triangle APM\backsim\triangle PCN$,

$\therefore\frac{PM}{CN}=\frac{AP}{PC}=\frac{1}{2}$,$\therefore PM=\frac{1}{2}CN$.

$\because\angle CNP=90°$,$\angle PCN=30°$,

$\therefore PC=2PN$,$CN=\sqrt{3}PN$,

$\therefore PN=\frac{\sqrt{3}}{3}CN$,$\therefore\frac{PM}{PN}=\frac{\frac{1}{2}CN}{\frac{\sqrt{3}}{3}CN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because\angle EPF=\angle MPN=90°$,

$\therefore\angle EPM=\angle FPN=90°-\angle EPN$.

$\because\angle PME=\angle PNF=90°$,

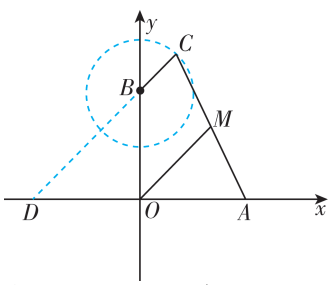
$\therefore\triangle PME\backsim\triangle PNF$,

$\therefore\frac{PE}{PF}=\frac{PM}{PN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\frac{PE}{PF}$的值会变化.

专题六 “隐圆”模型

模型 21 定点定长

1. $1+2\sqrt{2}$ 【解析】$\because C$ 为坐标平面内一点,$BC=2$,$\therefore$ 点 C 在半径为 2 的 $\odot B$ 上. 如图,取 $OD=OA=4$,连接 DB 并延长交 $\odot B$ 于点 C,此时 OM 有最大值.

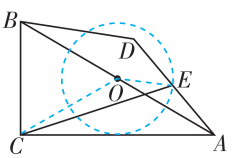


$\because$ 点 M 为线段 AC 的中点,$OD=OA$,$\therefore$ OM 是 $\triangle ACD$ 的中位线,$\therefore$ $OM=\frac{1}{2}CD$. 在 Rt$\triangle OBD$ 中,$BD=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,$\therefore$ $CD=2+4\sqrt{2}$,$\therefore$ OM 的最大值是 $1+2\sqrt{2}$. 故答案为 $1+2\sqrt{2}$.

思路分析

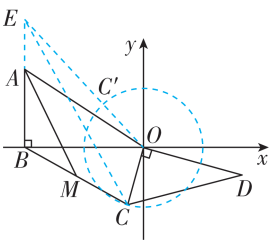
$BC=2$,符合一点定长,点 C 在以 B 为圆心,2 为半径的圆上,取 $OD=OA$,当 D,B,C 三点共线时,CD 的值最大,即 OM 的值最大,利用中位线定理求 OM 的长.

2. D 【解析】取 AB 的中点 O,连接 OE,OC,如图.

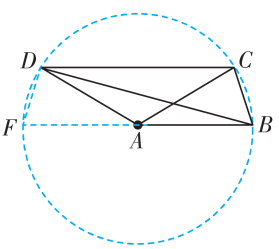


由题意知 $BD=BC=2$. $\because$ 点 E 为 AD 的中点,点 O 为 AB 的中点,$\therefore$ $OE=\frac{1}{2}BD=1$,$\therefore$ 点 E 的轨迹是以 O 为圆心,1 为半径的圆. 由 $\angle ACB=90°$,$\angle BAC=30°$,$BC=2$ 可得 $AB=4$. $\because$ 点 O 为 AB 中点,$\therefore$ $OC=\frac{1}{2}AB=2$,$\therefore$ CE 长度的最大值为 $OC+OE=2+1=3$,最小值为 $OC-OE=2-1=1$,$\therefore$ CE 的长度不可能是 3.1,故选 D.

3. D 【解析】在 Rt$\triangle OCD$ 中,$\tan D=\frac{OC}{OD}$,则 $\frac{OC}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $OC=3$,则点 C 在以点 O 为圆心,3 为半径的圆上. 延长 BA 到点 E,使 $AE=AB$,连接 EC,如图. 又因为 M 是 BC 中点,所以 AM 是 $\triangle EBC$ 的中位线,则 $AM=\frac{1}{2}EC$. 连接 EO,与 $\odot O$ 交于点 C',在 Rt$\triangle EBO$ 中,$EO=\sqrt{8^2+6^2}=10$,所以 $EC'=10-3=7$,即 EC 的最小值为 7,所以 AM 的最小值为 $\frac{7}{2}$. 故选 D.



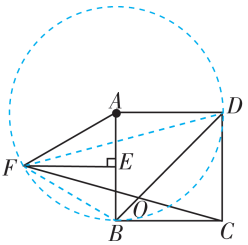
4. B 【解析】如图,以 A 为圆心,AB 长为半径作圆,延长 BA 交 $\odot A$ 于 F,连接 DF,则 $BF=2+2=4$. $\because DC//AB$,$\therefore$ $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$,$\therefore$ $DF=CB=1$. $\because FB$ 是 $\odot A$ 的直径,$\therefore$ $\angle FDB=90°$,$\therefore$ $BD=\sqrt{BF^2-DF^2}=\sqrt{15}$. 故选 B.



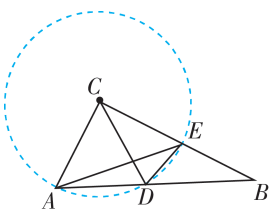
思路分析

$AB=AC=AD$，符合三点定长，点 B,C,D 在以 A 为圆心，AB 为半径的圆上，根据圆的性质计算 BD 的长.

5. A 【解析】如图，连接 DF,BF. ∵ $FE\perp AB$，$AE=EB$，∴ $FA=FB$. ∵ $AF=2AE$，∴ $AF=AB=FB$，∴ $\triangle AFB$ 是等边三角形. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AF=AD=AB$，∴ 点 A 是 $\triangle DBF$ 的外接圆的圆心，∴ $\angle FDB=\frac{1}{2}\angle FAB=30°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AD=BC$，$\angle DAB=\angle ABC=90°$，$\angle DBC=45°$，∴ $\angle FAD=\angle FBC=90°+60°=150°$，∴ $\triangle FAD\cong\triangle FBC$，∴ $\angle ADF=\angle FCB=\frac{1}{2}\times(180°-150°)=15°$，∴ $\angle DOC=\angle OBC+\angle OCB=60°$. 故选 A.



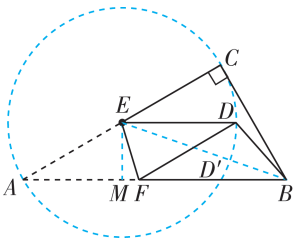
6. D 【解析】如图，以 C 为圆心，CA 为半径作 $\odot C$，则 D,E 在 $\odot C$ 上，可得 $\angle EAD=\frac{1}{2}\angle DCE$，$\angle AED=\frac{1}{2}\angle ACD$，∴ $\angle EDB=\angle EAD+\angle AED=\frac{1}{2}(\angle ECD+\angle ACD)=45°$，故①②正确. 当 $\triangle BDC$ 是等腰三角形时，易知 $DC=DB$，∴ $\angle DCB=\angle B$. ∵ $\angle ACD+\angle DCB=90°$，$\angle CAD+\angle B=90°$，∴ $\angle ACD=\angle CAD$，∴ $DC=DA$. ∵ $CA=CD$，∴ $AC=CD=AD$，∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形，故③正确. 当 $\angle B=22.5°$ 时，易知 $\angle CAD=\angle CDA=67.5°$，∴ $\angle ACD=180°-2\times67.5°=45°$，∴ $\angle DCA=\angle DCE=45°$. ∵ $CA=CE$，$CD=CD$，∴ $\triangle ACD\cong\triangle ECD$(SAS)，故④正确. 故选 D.



思路分析

$CA=CD=CE$，符合三点定长，点 A,D,E 在以 C 为圆心，CA 为半径的圆上，利用圆和三角形的性质进行判断.

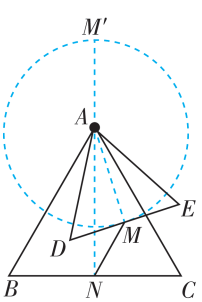
7. $4+\sqrt{7}-\sqrt{3}$ 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=2$，∴ $AB=4$，∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. 如图，以点 E 为圆心，AE 为半径作圆，连接 BE，交 $\odot E$ 于点 D'. ∵ 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle DEF$，且点 E 是 AC 的中点，∴ $AF=DF$，$AE=ED=\sqrt{3}$. ∵ $C_{\triangle BDF}=DF+FB+BD=AF+FB+BD$，∴ 当 D 与 D' 重合时，$\triangle BDF$ 的周长最小，最小值为 $AB+BD'$. 过 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M，∴ $EM=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由勾股定理可得 $AM=\sqrt{AE^2-EM^2}=\sqrt{3-\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}$，∴ $BM=AB-AM=\frac{5}{2}$. 由勾股定理可得 $BE=\sqrt{EM^2+BM^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{7}$，∴ $BD'=BE-ED'=\sqrt{7}-\sqrt{3}$，∴ $\triangle BDF$ 周长的最小值是 $4+\sqrt{7}-\sqrt{3}$.



思路分析

由折叠知 $AF=DF$，$AE=DE$，符合一点定长模型，点 D 在以 E 为圆心，AE 长为半径的圆上，$\triangle BDF$ 的周长为 $BD+BF+DF=BD+BF+AF$，则当 B,D,E 三点共线时，$\triangle BDF$ 的周长最小.

8. $5\sqrt{3}$ 【解析】如图，连接 AN,AM，以点 A 为圆心，AM 为半径作圆，反向延长 AN 与 $\odot A$ 交于点 M'. ∵ $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转，∴ 点 M 在以点 A 为圆心，AM 为半径的圆上运动，则当点 M 旋转到 M'，即 M 在 NA 的延长线上时，MN 的值最大，为 $M'N$ 的长. ∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，点 N,M 分别为 BC,DE 的中点，$AB=6$，$AD=4$，∴ $AN\perp BC$，$AM\perp DE$，$BN=3$，$DM=2$. 在Rt$\triangle ABN$ 中，由勾股定理得 $AN=\sqrt{AB^2-BN^2}=3\sqrt{3}$. 在Rt$\triangle ADM$ 中，由勾股定理得 $AM=\sqrt{AD^2-DM^2}=$



$2\sqrt{3}$，则 $AM'=AM=2\sqrt{3}$，∴ $M'N=AN+AM'=5\sqrt{3}$，即 MN 的最大值为 $5\sqrt{3}$. 故答案为 $5\sqrt{3}$.

思路分析

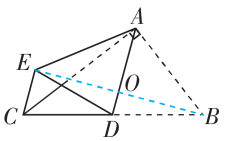
连接 AN，AM，AM 为定长，符合一点定长，所以点 M 在以 A 为圆心，AM 为半径的圆上，当 M 在 NA 延长线上时，MN 的值最大.

9. 【解】(1)∵ $\angle BAC=90°$，$AB=3$，$AC=4$，

∴ $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{16+9}=5$.

∵ 点 D 是 BC 的中点，$\angle BAC=90°$，

∴ $AD=CD=BD=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$.



如图，连接 BE 交 AD 于 O. ∵ 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折得到 $\triangle AED$，

∴ $AE=AB$，$DE=DB$，

∴ AD 垂直平分 BE，

∴ $OE=BO$，$AD\perp BE$.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times AB=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$，且 $CD=BD$，

∴ $S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=3$，∴ $\frac{1}{2}AD\times OB=3$，

∴ $OB=\frac{12}{5}$，∴ $BE=\frac{24}{5}$.

∵ $DE=DB$，$CD=DB$，

∴ $DE=CD$，$\angle DEB=\angle DBE$，

∴ $\angle ECD=\angle CED$.

∵ $\angle ECD+\angle CED+\angle DEB+\angle DBE=180°$，

∴ $\angle CED+\angle DEB=\angle CEB=90°$，

∴ $CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{25-\frac{576}{25}}=\frac{7}{5}$.

(2)①∵ 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折得到 $\triangle AED$，

∴ $AB=AE=3$，

∴ 点 E 在以 A 为圆心，3 为半径的圆上，

∴ 点 E 在 AC 上时，CE 有最小值，最小值为 $AC-AE=4-3=1$.

②∵ 点 D 从点 B 运动到点 C，

∴ 点 E 的运动轨迹是以 A 为圆心，AB 为半径的半圆，

∴ 点 E 运动的路径长为 $\frac{3\cdot\pi\times 180}{180}=3\pi$.

10. (1)【证明】在 Rt $\triangle BDC$ 中，$\angle BDC=90°$，$\angle DBC=30°$，在 Rt $\triangle BAE$ 中，$\angle AEB=90°$，$\angle EBA=30°$，

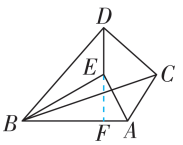
∴ $\triangle ABE\backsim\triangle CBD$，$\angle DBE+\angle EBC=\angle ABC+\angle EBC$，$BE=AB\cdot\cos\angle ABE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{BE}{BD}$，$\angle DBE=\angle CBA$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle EBD$，

∴ $\frac{AC}{DE}=\frac{AB}{BE}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$.

(2)【解】在 Rt $\triangle BAE$ 中，$\angle AEB=90°$，$\angle EBA=30°$，$AB=4$，∴ $AE=AB\cdot\sin\angle EBA=\frac{1}{2}AB=2$，$\angle BAE=60°$.



图(1)

延长 DE 交 AB 于点 F，如图(1)所示，∴ $EF=AE\cdot\sin\angle BAE=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，$AF=\frac{1}{2}AE=1$，

∴ $BF=AB-AF=4-1=3$.

由(1)可得 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\sqrt{3}$，∴ $DF=DE+EF=2\sqrt{3}$.

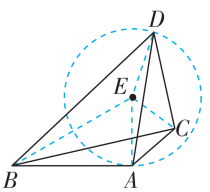
在 Rt$\triangle BFD$ 中，

$BD=\sqrt{BF^2+DF^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$.

∵ $\triangle ABC\backsim\triangle EBD$，∴ $\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{DE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴ $BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{21}=2\sqrt{7}$.

(3)【解】如图(2)所示，以 AB 为边在 AB 上方作 Rt$\triangle BAE$，且 $\angle EAB=90°$，$\angle EBA=30°$，连接 ED，EC. 同(1)可得 $\triangle BDE\backsim\triangle BCA$，∴ $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ∵ $AC=2$，∴ $DE=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 在 Rt $\triangle AEB$ 中，$AB=4$，$AE=AB\cdot\tan\angle EBA=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，



图(2)

∴ D 在以 E 为圆心，$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆上运动，

∴ 当点 A,E,D 三点共线时，AD 的值最大，此时如图(3)所示，$AD=AE+DE=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

在 Rt△ABD 中，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{21}}{3}$，

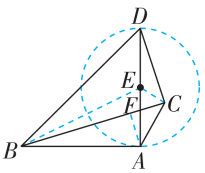
∴ $\cos\angle BDA=\frac{AD}{BD}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{21}}{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$\sin\angle BDA=\frac{AB}{BD}=\frac{4}{\frac{4\sqrt{21}}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

∵ $\angle BEA=60°$，∴ $\angle BED=120°$.

∵ $\triangle ABC\backsim\triangle EBD$，∴ $\angle BDE=\angle BCA$.

过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F，

∴ $CF=AC\cdot\cos\angle ACB=2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$，$AF=AC\cdot\sin\angle ACB=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.



图(3)

∵ $\angle DBC=30°$，∴ $BC=\frac{\sqrt{3}}{2}BD=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4\sqrt{21}}{3}=2\sqrt{7}$，∴ $BF=BC-CF=2\sqrt{7}-\frac{4\sqrt{7}}{7}=\frac{10\sqrt{7}}{7}$，

∴ $\tan\angle CBA=\frac{AF}{BF}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{7}}{\frac{10\sqrt{7}}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

模型 22　定弦定角

1.【解】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle ABC=90°$，

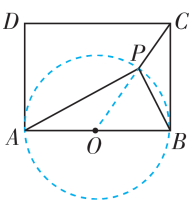
∴ $\angle ABP+\angle PBC=90°$.

∵ $\angle PBC=\angle PAB$，

∴ $\angle PAB+\angle PBA=90°$，

∴ $\angle APB=90°$，

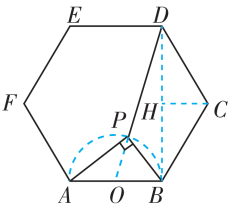
∴ 点 P 在以 AB 为直径的圆上. 如图，设圆心为 O，则 O 为 AB 的中点，连接 OC 交⊙O 于 P，此时 PC 的长最小.



∵ $OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$，

∴ PC 长的最小值为 $2\sqrt{13}-4$.

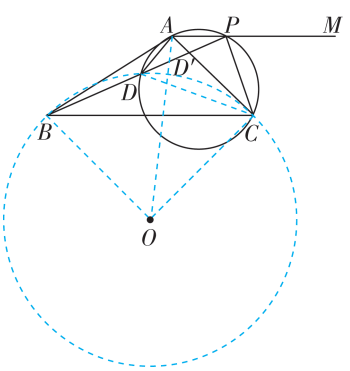
2. B　**【解析】**∵ $AB=4$，$\angle APB=90°$，∴ 点 P 在以 AB 为直径的半圆上. 如图，设圆心为 O，则 O 为 AB 的中点，连接 OD，当 O,P,D 三点共线时，PD 的长有最小值. 连接 BD，过点 C 作 $CH\perp BD$ 于点 H. ∵ 点 O 为 AB 的中点，∴ $OA=OB=OP=4\div2=2$. ∵ 正六边形的每个内角为 $180°\times(6-2)\div6=120°$，$CD=CB$，∴ $\angle CBD=(180°-120°)\div2=30°$，$BD=2BH$，∴ $\angle OBD=120°-30°=90°$. 在 Rt△CBH 中，$BH=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=2\sqrt{3}$，∴ $BD=4\sqrt{3}$. 在 Rt△OBD 中，$OD=\sqrt{2^2+(4\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$，∴ PD 的最小值为 $OD-OP=2\sqrt{13}-2$. 故选 B.



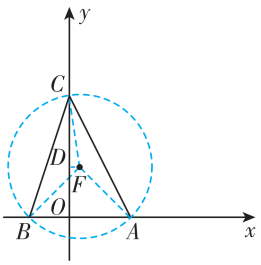
思路分析

$\angle APB=90°$，$AB=4$，符合定弦定角模型，则点 P 在以 AB 为直径的半圆上，取 AB 的中点 O，当 O,P,D 三点共线时，PD 的长最小，再利用正六边形的性质计算.

3. A　**【解析】**如图，连接 CD. ∵ $AM\parallel BC$，∴ $\angle MAC=\angle ACB=45°$，∴ $\angle CDP=\angle CAP=45°$，∴ $\angle BDC=135°$. 作△BDC 的外接圆，圆心为 O，则点 D 在劣弧 BC 上运动. ∵ $\angle BDC=135°$，∴ 易得 $\angle BOC=90°$，∴ △BOC 是等腰直角三角形. ∵ $BC=8\sqrt{2}$，∴ $OB=OC=8\sqrt{2}\times\sin45°=8$. 连接 OA 交劣弧 BC 于点 D'，此时 AD' 的长即为 AD 长的最小值. ∵ $\angle ACB=\angle BCO=45°$，∴ $\angle ACO=\angle ACB+\angle BCO=90°$，∴ $OA=\sqrt{OC^2+AC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，∴ $AD'=OA-OD'=10-8=2$，∴ AD 长的最小值为 2. 故选 A.



4. $(0,6)$ 或 $(0,-6)$ 【解析】如图，在 x 轴的上方作等腰直角三角形 ABF，其中 $FB=FA$，$\angle BFA=90°$，以 F 为圆心，FA 长为半径作 $\odot F$，由 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle BFA=45°$ 可知 $\odot F$ 交 y 轴于 C，连接 CF，过点 F 作 $FD\perp y$ 轴于 D. $\because B(-2,0)$，$A(3,0)$，$\triangle ABF$ 是等腰直角三角形，$\therefore F\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，$FA=FB=FC=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 设 $C(0,m)$，则 $CD=m-\frac{5}{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，$DF^2+CD^2=CF^2$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(m-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$，解得 $m=6$ 或 -1（舍去），$\therefore C(0,6)$. 根据对称性可知点 $C'(0,-6)$ 也符合条件. 故答案为 $(0,6)$ 或 $(0,-6)$.



思路分析

$\angle ACB$ 为定角，AB 长为定值，符合定弦定角模型，在 x 轴的上方作等腰直角三角形 ABF，点 C 在以 F 为圆心，FA 长为半径的圆上，再利用等腰直角三角形的性质及勾股定理求点 C 坐标即可.

5. $\frac{1}{3}$ 【解析】$\because l_1/\!/l_2$，$AC=BD$，

$\therefore$ 易得 $\triangle ACE\cong\triangle BDE$，$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB$.

$\because A$ 为定点，且 $l_1/\!/l_2$，$AB\perp l_2$，

$\therefore AB$ 的长为定值，

$\therefore AE$ 的长为定值.

$\because BH\perp CD$，$\therefore\angle BHE=90°$，

$\therefore$ 点 H 在以 BE 为直径的圆上运动，取 BE 的中点 O，即该圆的圆心，

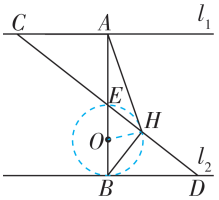
$\therefore OE=\frac{1}{3}OA$.

易知当 AH 与 $\odot O$ 相切时，$\angle BAH$ 最大.

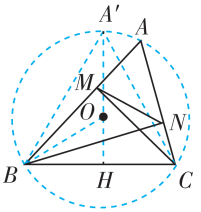
如图，连接 OH. 当 AH 与 $\odot O$ 相切时，$\angle AHO=90°$，

$\therefore\sin\angle BAH=\frac{OH}{OA}=\frac{OE}{OA}=\frac{1}{3}$.

故答案为 $\frac{1}{3}$.



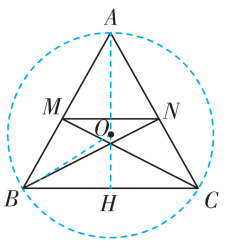
6. $\frac{288}{25}$ 【解析】如图(1)，画出 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$，连接 OB. $\because BC=8$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$\therefore$ 点 A 在优弧 BC 上运动. 当 $A'O\perp BC$ 时，$\triangle A'BC$ 的面积最大. 设 $A'O$ 的延长线交 BC 于 H，则 $BH=\frac{1}{2}BC=4$. 易证 $\angle BOH=\angle BAC$，$\therefore\sin\angle BOH=\frac{4}{5}=\frac{BH}{BO}$，$\therefore BO=5$，$\therefore OH=3$，$\therefore A'H=8$，$\cos\angle BOH=\frac{3}{5}$，$\therefore\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，$S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}\times8\times8=32$.



图(1)

如图(2)，$\because CM\perp AB$，$\therefore\cos\angle MAC=\frac{AM}{AC}=\frac{3}{5}$.

$\because AH\perp BC$，$BH=CH$，$\therefore AB=AC$. $\because CM\perp AB$，$BN\perp AC$，$\therefore$ 易得 $AM=AN$，$\therefore\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$.

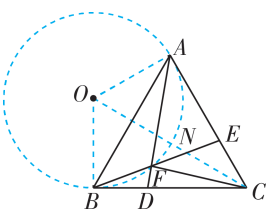


图(2)

$\because\angle MAN=\angle BAC$，$\therefore\triangle AMN\backsim\triangle ABC$，$\therefore\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2$，$\therefore\frac{S_{\triangle AMN}}{32}=\frac{9}{25}$，$\therefore S_{\triangle AMN}=\frac{288}{25}$. 故答案为 $\frac{288}{25}$.

7. 【解】$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB=BC=AC$，$\angle ABC=\angle BAC=\angle BCE=60°$.



$\because BD=CE$，

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle BCE(\mathrm{SAS})$，

$\therefore\angle BAD=\angle CBE$.

又 $\because\angle AFE=\angle BAD+\angle ABE$，

$\therefore\angle AFE=\angle CBE+\angle ABE=\angle ABC=60°$，

$\therefore\angle AFB=120°$，

$\therefore$ 点 F 在以 O 为圆心，OA 为半径的 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动（$\angle AOB=120°$，$OA=OB=2\sqrt{3}$）.

如图，连接 OC 交 $\odot O$ 于 N，

则 $OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=4\sqrt{3}$.

易知当点 F 与 N 重合时，CF 最小，

$\therefore$ 最小值为 $CF=OC-ON=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

思路分析

由 $\triangle ABD\cong\triangle BCE$(SAS)得 $\angle AFB=120°$，AB 的长为定值，符合定弦定角模型，则点 F 在以 O 为圆心，OA 为半径的 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动. 连接 OC 交 $\odot O$ 于 N，当点 F 与 N 重合时，CF 最小.

8.【解】【问题原型】(1) $\angle A$ 的度数不发生变化. 理由如下：

$\because\ \angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC$，$\angle BOC=90°$，

$\therefore\ \angle A=\dfrac{1}{2}\times 90°=45°$，为定值.

故在点 A 运动过程中，$\angle A$ 的度数不发生变化.

(2)当 AC 为 $\odot O$ 的直径时，AC 最大.

在 Rt$\triangle BOC$ 中，$\angle BOC=90°$，

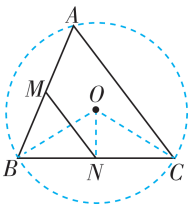
根据勾股定理，得 $OB^2+OC^2=BC^2$.

$\because\ OB=OC$，

$\therefore\ OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$，

$\therefore\ AC=2OC=2\sqrt{2}$，即 AC 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

【问题拓展】如图，作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$，连接 OB，OC，ON，则 $ON\perp BC$，易证 $\angle BON=\angle A=60°$，



$\therefore\ BN=\dfrac{1}{2}BC=2$，

$\therefore\ OB=\dfrac{BN}{\sin 60°}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\because\ M$，N 分别是 AB，BC 的中点，

$\therefore\ MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

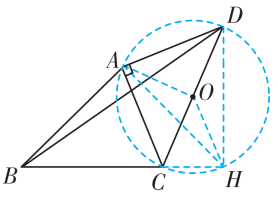
$\therefore\ MN=\dfrac{1}{2}AC$.

$\because\ AC$ 为直径时，AC 最大，此时 $AC=2OB=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\ MN$ 的最大值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，故答案为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

模型 23　四点共圆

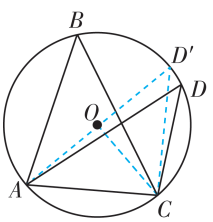
1. 4　**【解析】**如图，作 $DH\perp BC$，交 BC 的延长线于 H，取 CD 的中点 O，连接 OA，OH，AH. $\because\ DH\perp BH$，$\therefore\ \angle DHC=90°$，$\therefore\ \angle DHC+\angle DAC=90°$，$\therefore A$，$C$，$H$，$D$ 四点共圆. $\because\ \angle DAC=90°$，$CO=OD$，$\therefore\ OA=OD=OC=OH$，$\therefore\ A$，C，H，D 四点在以 O 为圆心，CD 为直径的圆上，$\therefore\ \angle CHA=\angle ADC=45°$. $\because\ \angle ABC=45°$，$\therefore\ \angle BAH=90°$，$BA=AH$. $\because\ \angle BAH=\angle CAD=90°$，$\therefore\ \angle BAC=\angle HAD$. $\because\ \angle ACD=\angle ADC=45°$，$\therefore\ AC=AD$. $\because\ AB=AH$，$\therefore\ \triangle BAC\cong\triangle HAD$(SAS)，$\therefore\ BC=DH$，$\therefore\ S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times BC\times DH=\dfrac{1}{2}\times BC^2=8$，$\therefore\ BC=4$(负值已舍去)，故答案为 4.



思路分析

作 $DH\perp BC$，交 BC 的延长线于 H，得 $\angle DHC=90°$，则四边形 $DACH$ 对角互补，得到 A，C，H，D 四点共圆.

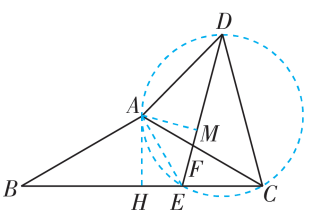
2. $6\sqrt{2}$　**【解析】**$\because\ \angle ABC=\angle ADC=45°$，$\therefore\ A$，$C$，$D$，$B$ 四点共圆. 如图，作 $\odot O$ 经过 A，C，D，B 四点，连接 OC，当 AD 为直径(AD')时，AD 有最大值. $\because\ \angle AD'C=45°$，$\therefore\ \angle AOC=90°$. $\because\ OA=OC$，$\therefore\ \triangle AOC$ 是等腰直角三角形. $\because\ AC=6$，$\therefore\ AO=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$，$\therefore\ AD'=2AO=6\sqrt{2}$，即 AD 的最大值为 $6\sqrt{2}$. 故答案为 $6\sqrt{2}$.



思路分析

$\angle ABC=\angle ADC=45°$，符合同一条线段所对的两个角相等，得到 A，C，D，B 四点共圆，当 AD 为直径时有最大值.

3. $2\sqrt{6}$　**【解析】**如图，连接 AE，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H. 在 Rt$\triangle ABH$ 中，$\because\ AB=AC=6$，$\angle B=30°$，



$\therefore\ \angle ACB=\angle B=30°$，$AH=\dfrac{1}{2}AB=3$，$\therefore$ 利用勾股定理可得 $BH=3\sqrt{3}$. $\because\ AB=AC$，$AH\perp BC$，$\therefore\ CH=$

$BH=3\sqrt{3}$，∴ $BC=6\sqrt{3}$，∴ $CE=\frac{1}{3}BC=2\sqrt{3}$，∴ $HE=CH-CE=\sqrt{3}$. 在Rt△AHE中，由勾股定理可得 $AE=\sqrt{AH^2+HE^2}=2\sqrt{3}$，∴ $AE=CE$，∴ $\angle CAE=\angle ACB=30°$，∴ $\angle AEC=120°$，$\angle AEB=60°$. ∵ $\angle ADC=60°$，∴ $\angle ADC+\angle AEC=180°$，∴ A,D,C,E 四点共圆，∴ $\angle ADE=\angle ACE=30°$，∴ $\angle CDE=\angle ADC-\angle ADE=30°$. ∵ $DE=DC$，∴ $\angle DEC=75°$，∴ $\angle AED=120°-75°=45°$. 过点 A 作 $AM\perp DE$ 于 M，则 $AM=\frac{\sqrt{2}}{2}AE=\sqrt{6}$. 在 Rt△$AMD$ 中，$\angle ADM=30°$，∴ $AD=2AM=2\sqrt{6}$. 故答案为 $2\sqrt{6}$.

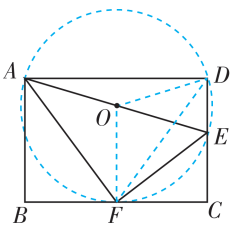
4. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle B=\angle C=90°$，∴ $\angle EFC+\angle FEC=90°$.

∵ $\angle AFE=90°$，∴ $\angle AFB+\angle EFC=90°$，

∴ $\angle AFB=\angle FEC$，∴ △ABF∽△FCE.

(2)【解】取 AE 的中点 O，连接 FD,OD,OF，如图.



∵ $\angle AFE=\angle ADE=90°$，

∴ A,D,E,F 四点共圆，即以 O 为圆心，AE 为直径的⊙O，

∴ $\angle AED=\angle AFD$.

∵ 当⊙O 与 BC 相切时，$\angle AFD$ 的度数最大，

∴ 此时 $\angle AED$ 的度数最大，

易知此时 $BF=CF=4$.

∵ △ABF∽△FCE，∴ $\frac{AB}{FC}=\frac{BF}{EC}$，

∴ $\frac{6}{4}=\frac{4}{EC}$，∴ $EC=\frac{8}{3}$，

∴ $DE=DC-CE=6-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$.

故当 $DE=\frac{10}{3}$时，$\angle AED$ 的度数最大.

思路分析

(2) $\angle AFE=\angle ADE=90°$，符合共斜边的两个直角三角形的四个顶点共圆，得到 A,D,E,F 四点共圆. 当⊙O 与 BC 相切时，$\angle AED$ 的度数最大，利用相似的性质确定 DE 的值.

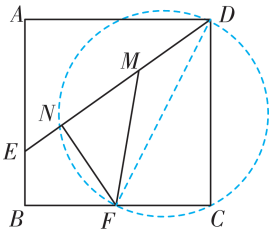
5.【解】如图，连接 DF.

∵ 点 F 是 BC 的中点，∴ $BF=CF=2$，

∴ $DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$.

∵ △FNM 是等腰直角三角形，

∴ $FN=MN$，$\angle FNM=90°$，



∴ $S=\frac{1}{2}FN^2$.

∵ $\angle DNF=\angle C=90°$，

∴ F,C,D,N 四点共圆.

∵ $FN^2+MN^2=FM^2$，

$FN=MN$，∴ $2FN^2=FM^2$，

∴ $FN^2=\frac{1}{2}FM^2$，

∴ 当点 M 与点 D 重合时，FN 有最大值，

∴ FN 的最大值为$\frac{DF}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$，

∴ S 的最大值为 5.

当点 E 与点 B 重合时，FN 有最小值，此时△EFN 是以 EF 为斜边的等腰直角三角形，

∴ FN 的最小值为$\frac{BF}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

∴ S 的最小值为 1. 故 S 的取值范围是 $1\leqslant S\leqslant 5$.

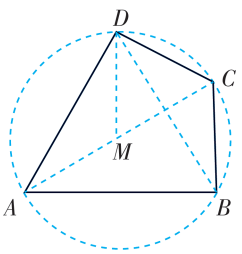
思路分析

$\angle DNF=\angle C=90°$，符合共斜边的两个直角三角形的四个顶点共圆，得到 F,C,D,N 四点共圆. 当点 M 与点 D 重合时，S 最大；当点 E 与点 B 重合时，S 最小，进而得解.

6.【解】存在. 如图，连接 AC,BD，在 AC 上取一点 M，连接 DM，使得 $DM=DC$.

∵ $\angle DAB=60°$，

$\angle DCB=120°$，



∴ $\angle DAB+\angle DCB=180°$，

∴ A,B,C,D 四点共圆.

∵ $AD=AB$，$\angle DAB=60°$，

∴ △ADB 是等边三角形，

∴ $\angle ABD=\angle ADB=60°$，$AD=BD$，

∴ $\angle ACD=\angle ABD=60°$，$\angle ACB=\angle ADB=60°$.

∵ $DM=DC$，∴ △DMC 是等边三角形，

∴ $\angle ADB=\angle MDC=60°$，$CM=DC$，

∴ $\angle ADM=\angle BDC$.

∵ $AD=BD$，$MD=CD$，

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle BDC(\mathrm{SAS})$,

$\therefore AM=BC, \therefore AC=AM+MC=BC+CD.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $AD+AB+CD+BC=AD+AB+AC, AD=AB=6$,

$\therefore$ 当 AC 最大时,四边形 $ABCD$ 的周长最大,

$\therefore$ 当 AC 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径时,四边形 $ABCD$ 的周长最大,此时 $\angle ABC=90°$.

$\because \angle ACB=60°, \therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{6}{AC}=\sin 60°$,

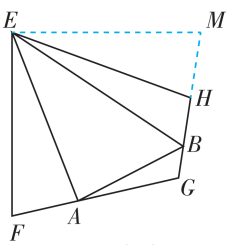
$\therefore AC$ 的最大值为 $4\sqrt{3}$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长的最大值为 $12+4\sqrt{3}$.

思路分析

$\angle DAB+\angle DCB=180°$,符合对角互补四边形的四个顶点共圆,得到 A,B,C,D 四点共圆,当 AC 最大时,四边形 $ABCD$ 的周长有最大值.

7. (1)【证明】如图(1),延长 BH 到 M,使得 $HM=FA$,连接 EM.



图(1)

$\because \angle F+\angle EHG=180°$,

$\angle EHG+\angle EHM=180°$,

$\therefore \angle F=\angle EHM$.

$\because FE=HE, FA=HM$,

$\therefore \triangle EFA \cong \triangle EHM(\mathrm{SAS})$,

$\therefore EA=EM, \angle FEA=\angle HEM$.

$\because \angle AEB=\dfrac{1}{2}\angle FEH$,

$\therefore \angle FEA+\angle BEH=\angle HEM+\angle BEH=\angle BEM=\dfrac{1}{2}\angle FEH$,

$\therefore \angle AEB=\angle BEM$.

$\because BE=BE, EA=EM, \therefore \triangle AEB \cong \triangle MEB(\mathrm{SAS})$,

$\therefore AB=BM$.

$\because BM=BH+HM=BH+AF, \therefore AB=AF+BH$.

(2)【解】①$NH=FN$.

证明:$\because EN$ 平分 $\angle FEH$,

$\therefore \angle FEN=\angle HEN$.

$\because EF=EH, EN=EN$,

$\therefore \triangle ENF \cong \triangle ENH(\mathrm{SAS})$,

$\therefore NH=FN$.

②$\because \triangle ENF \cong \triangle ENH, \therefore \angle ENF=\angle ENH$.

$\because \angle ENM=\alpha, \therefore \angle ENF=\angle ENH=180°-\alpha$,

$\therefore \angle MNH=180°-\alpha-\alpha=180°-2\alpha$.

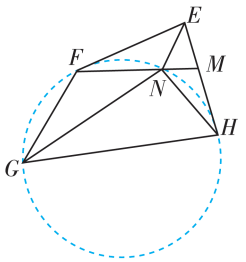
$\because \angle FGH=180°-2\alpha$,

$\therefore \angle MNH=\angle FGH$.

$\because \angle MNH+\angle FNH=180°$,

$\therefore \angle FGH+\angle FNH=180°$,

$\therefore$ 四边形 $FGHN$ 的对角互补,



图(2)

$\therefore F,G,H,N$ 四点共圆,如图(2).

$\because NH=NF, \therefore \overset{\frown}{NH}=\overset{\frown}{NF}$,

$\therefore \angle NGH=\angle NGF=\dfrac{1}{2}\angle FGH=90°-\alpha$.

8.【解】(1)依据一:同弧所对的圆周角相等;

依据二:三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

故答案为同弧所对的圆周角相等;三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

(2)延长 AD 与 $\odot O$ 交于点 E,连接 BE,

则 $\angle ACB=\angle AEB$.

又$\because \angle ADB=\angle AEB+\angle DBE$,

$\therefore \angle ACB<\angle ADB$.

这与已知条件"$\angle ACB=\angle ADB$"矛盾,故点 D 在 $\odot O$ 内不成立.

(3)$\because \angle ABD=\angle ACD$,

$\therefore A,B,C,D$ 四点共圆,

$\therefore \angle CDB=\angle CAB$,

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle DCE$,

$\therefore \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{BE}{CE}$,

$\therefore AE \cdot CE=BE \cdot DE$.

$\because E$ 为 AC 中点,$\therefore AE=CE=\dfrac{1}{2}AC$.

$\because BD=6, BE=4$,

$\therefore DE=BD-BE=2$,

$\therefore \dfrac{1}{2}AC \cdot \dfrac{1}{2}AC=4\times 2$,

解得 $AC=4\sqrt{2}$(负值已舍去),故答案为 $4\sqrt{2}$.